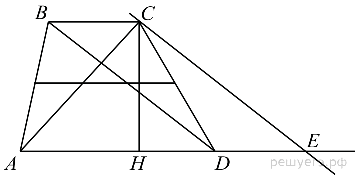
Задания

Задание 23 № 353511

Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 16 и 12, а средняя линия равна 10.

Решение.



Пусть $AC = 12,$ $BD = 16,$ $m = 10$ — длина средней линии. Проведём высоту CH и проведём прямую $CE,$ параллельную $BD.$ Рассмотрим четырёхугольник $BCED:$ $BC \parallel DE,$ $BD \parallel CE,$ следовательно, $BCED$ — параллелограмм, откуда $DE = BC,$ $BD = CE = 16.$ Рассмотрим треугольник $ACE,$ $AE = AD + DE = AD + BC = 2m = 20.$ Пусть p — полупериметр треугольника $ACE.$ Найдём площадь треугольника ACE по формуле Герона:

$$S_{ACE} = \sqrt{p(p-AC)(p-CE)(p-AE)} = \sqrt{24(24-12)(24-16)(24-20)} = \sqrt{24\cdot 12\cdot 8\cdot 4} = 96$$

Выразим площадь треугольника ACE как произведение основания AE на высоту $CH,$ откуда найдём CH:

$$S_{ACE} = \frac{1}{2}AE\cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{2S_{ACE}}{AE} \Leftrightarrow CH = 9,6.$$

Площадь трапеции равна произведению высоты на полусумму оснований:

$$S = \frac{AD+BC}{2}\cdot CH = m\cdot CH = 10\cdot 9,6 = 96.$$

Ответ: 96.

Примечание.

Решение можно сократить, заметив, что треугольник ACE является прямоугольным, и его площадь равна площади трапеции $ABCD.$ Действительно, в силу равенства

$$AE^2 = AC^2 + CE^2 \Leftrightarrow 400 = 256 + 144,$$

по теореме, обратной теореме Пифагора, заключаем, что треугольник ACE прямоугольный. Тогда площадь треугольника находится как полупроизведение катетов:

$$S = \frac{1}{2}AC\cdot CE = 96.$$

Далее, треугольник ACE имеет общую высоту с трапецией, а его основание AE есть сумма оснований трапеции. Таким образом, найденная площадь данного треугольника равна искомой площади трапеции.